数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 53-64

The integrality of p-adic multiple zeta values (joint work with M. Hirose, S. Yasuda)

大阪大学大学院理学研究科　赤木 和真
Kazuma Akagi
Department of Mathmatics, Graduate School of Science,
Osaka University

1 Introduction

本稿では, 古庄氏 [F] によって定義された p-進多重ゼータ値の integrality に関する結果について解説する. この研究は広瀬氏と安田氏との共同研究である. 非負整数 k に対して, 集合 $\{\frac{p^l}{l!} \mid l \geq k\}$ によって生成される $\mathbb{Z}_p$ のイデアルを $(p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$ と表すことにする. 主結果は p-進多重ゼータ値 $\zeta_p(\Bbbk)$ に関する次の定理である.

Theorem 1.1 (赤木-広瀬-安田 [AHY], Chatzistamatiou[Cha]). n を非負整数とする. 重さ k の index $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して,

$$\zeta_p(\Bbbk) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が成り立つ.

本稿は 5 つの章からなる. 第 2 章で p-進多重ゼータ値の特徴付けを行う. 第 3 章ログ・スキームを用いて, p-進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ 上のコホモロジー $H_{\mathbb{Q}_p}$ を定義し, p-進多重ゼータ値との関係を見る. 第 4 章では第 3 章で構成したコホモロジーの $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデル H を構成するために複体 $C^\bullet$ を導入する. 第 5 章で複体 $C^\bullet$ に Frobenius 作用を定義し主定理の証明を行う.

2 p-進多重ゼータ値と iterated formal integral

初めに, p-進多重ゼータ値を定義する前に p-進多重ポリログを定義する. 以下 $a \in \mathbb{C}_p$ を固定する. 写像 $\log^a : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ を $\log^a(p) = a$ となる p-進対数関数とする.

Definition 2.1 (古庄 [F]). 任意の index $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n)$ に対して, p-進多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}^a_{\Bbbk}(t)$ を次のように定める:

$$\mathrm{Li}^a_{\Bbbk}(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{t}\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_n-1}(t)dt & \text{if } k_1 > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t}\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_{n-1}}(t)dt & \text{if } k_1 = 1, n > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t}dt = -\log^a(1-t) & \text{if } k_1 = 1, n = 1. \end{cases}$$

f を $\mathbb{C}_p$ 上定義された関数とする. 元 $\alpha \in \mathbb{C}_p$ に収束する数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ であって, 体拡大 $\mathbb{Q}_p(t_1, t_2, \cdots)/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数が有限であるような任意の数列に対して, 数列に依らずに極限 $\lim_{i\to\infty} f(t_i)$ が存在するとき, この極限を $\lim'_{t\to\alpha} f(t)$ と書くことにする.

Theorem 2.2 (古庄 [F]). $\lim'_{t\to 1} \mathrm{Li}^a_{\mathbb{k}}(t)$ が収束するか発散するかは枝 a に依らない. さらに, 収束するときは収束の値も枝 a に依らない.

次に, p-進多重ゼータ値を定義する.

Definition 2.3 (古庄 [F]). $\lim'_{t\to 1} \mathrm{Li}^a_{\mathbb{k}}(t)$ が収束するとき, その値を $\zeta_p(\mathbb{k})$ と書き, p-進多重ゼータ値と呼ぶ.

Theorem 2.4 (古庄 [F]). $k_1 > 1$ であるとき, $\lim'_{t\to 1} \mathrm{Li}^a_{\mathbb{k}}(t)$ はつねに収束する.

注意として, $k_1 = 1$ のときでも収束することがある.

Theorem 2.5 (古庄 [F]). $\zeta_p(\mathbb{k}) \in \mathbb{Q}_p$ が成り立つ.

以下, 枝 $a = 0$ とする. 次に, p-進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbb{k})$ を特徴付けるために次のような集合を準備する.

$$R := \{\ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < 1 \text{ 上収束する } \}$$

$$R^{\dagger} := \{\ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < \epsilon \text{ 上収束する}, \epsilon > 1\}$$

このとき, 任意の元 $f \in R^{\dagger}$ に対して, $t = 1$ での値 $f(1)$ は p-進数である. Frobenius 射 φ を

$$\varphi(t) := \frac{t^p}{(1-t)^p + t^p}$$

により定義する. このとき, 任意の元 $f \in \mathbb{Q}_p[[t]]$ に対して, $\varphi(f)(t) := f(\varphi(t))$ とおくことで, Frobenius 射 φ は自己準同型 $\varphi : R^{\dagger} \to R^{\dagger}$ へ延びて, 次が成り立つ.

Theorem 2.6. 任意の index $\mathbb{k}$ に対して, $R^{\dagger}$ の元からなる族 $(h_{\mathbb{k},\mathbb{k}'})_{\mathbb{k}' \text{ s.t. } |\mathbb{k}'|<|\mathbb{k}|}$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する:

$$\varphi(\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}) = p^{|\mathbb{k}|}\mathrm{Li}_{\mathbb{k}} + \sum_{\mathbb{k}' \text{ s.t. } |\mathbb{k}'|<|\mathbb{k}|} h_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}\mathrm{Li}_{\mathbb{k}'}.$$

Coleman 積分は Frobenius 射の持ち上げに依らないということから, 古庄氏によって定義された p-進多重ゼータ値 $\zeta_p(\mathbb{k})$ は次の性質 (i), (ii) により特徴付けられる:

(i) $\zeta_p(\emptyset) = 1$,

(ii) $\zeta_p(\mathbb{k}) = p^{|\mathbb{k}|}\zeta_p(\mathbb{k}) + \sum_{\mathbb{k}'} h_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}(1)\zeta_p(\mathbb{k}')$.

Theorem 2.6 を証明するために formal iterated integral を導入する. まず $\mathbb{Q}_p((t))$ 上の t-進連続な 1-form の空間を $\Omega^1_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}$ と表す. この空間は dt によって生成される階数 1 の自由

$F((t))$-加群である. また dt によって生成された $\Omega^1_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Q}_p[[t]]$-部分加群 (resp. $R^\dagger$-部分加群) を $\Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ (resp. $\Omega^1_{R^\dagger}$) と表すことにし, 写像 $\int_0 : \Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]} \to t\,\mathbb{Q}_p[[t]]$ は

$$\int_0 \omega = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad \omega = (\sum_{n\geq 0} a_n t^n)dt$$

により定義する. $\int_0 \omega$ を ω の formal integral と呼ぶ. k を非負整数とする. $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ に対して, $\int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k$ を帰納的に次のように定義する (ただし, $k=0$ のときは $\int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k = 1$ とする). $f = \int_0 \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k$ とおくと, $f\omega_1 \in \Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ であることから, foraml integral $\int_0 f\omega_1$ を $\int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k$ と表すことにする. これを $\omega_1, \ldots, \omega_k$ の formal iterated integral と呼ぶ. また $\Omega^1_{R^\dagger}$ に関しても同様に定義できる.

先ほど定義した iterated formal integral を用いて多重ポリログを考えることができる. index $\mathbb{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ とし $w = x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y$ を $\mathbb{k}$ と対応する x, y からなる語とする. この w を $w = w_1 \cdots w_k$ と表すことにする (ただし, $k = |\mathbb{k}|$ とする). 各 $i = 1, \ldots, k$ に対して,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおき, ω_i を $\frac{1}{t}\Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ の元とみなす. また $w_k = y$ なので, $\omega_k \in \Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ である. したがって, foraml iterated integral は形式べき級数 $\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}(t)$ と一致する:

$$\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}(t) = \int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k.$$

Proposition 2.7. k を正の整数とし, $\omega_1, \ldots, \omega_{k-1} \in \frac{1}{t}\Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$, $\omega_k \in \Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ とする. 整数 $i \in \{1, \ldots, k\}$ を固定し, $\omega_i \in \Omega^1_{\mathbb{Q}_p[[t]]}$ と仮定する. また, $f_i = \int_0 \omega_i$ とおく. このとき, foraml iterated integral

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_k$$

は次の表示を持つ.

(i) $2 \leq i \leq k-1$ であるならば

$$\begin{aligned} I = &\int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{i-2} \circ f_i\omega_{i-1} \circ \omega_{i+1} \circ \cdots \circ \omega_k \\ &- \int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{i-1} \circ f_i\omega_{i+1} \circ \omega_{i+2} \circ \cdots \circ \omega_k. \end{aligned}$$

(ii) $i = 1$ かつ $k \geq 2$ であるならば

$$I = f_1 \int_0 \omega_2 \circ \cdots \circ \omega_k - \int_0 f_1\omega_2 \circ \omega_{i+2} \circ \cdots \circ \omega_k.$$

(iii) $i = k$ かつ $k \geq 2$ であるならば

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{k-2} \circ f_k\omega_{k-1}.$$

(iv) $i=k=1$ であるならば, $I=f_1$ である.

次に $R^\dagger$ 上の foraml iterated integral について考える. 各整数 k に対して, $|\mathbb{k}|\leq k$ である多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}$ によって生成される $\mathbb{Q}_p[[t]]$ 上の $R^\dagger$-部分加群を M_k と書き表すことにする.

Proposition 2.8. 整数 $k\geq 0$ とし, $\omega_1,\ldots,\omega_k\in\frac{1}{t}\Omega^1_{R^\dagger}+\frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}$ とする. もし $k\geq 1$ なら, $\omega_k\in\frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}$ と仮定する. このとき, $\int_0\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k$ は M_k に属する. さらに, もしある $i\in\{1,\ldots,k\}$ に対し, $\omega_i\in\Omega^1_{R^\dagger}$ であるなら, $\int_0\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k$ は M_{k-1} に属する.

Proof. $\frac{1}{t}\Omega^1_{R^\dagger}+\frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}=\mathbb{Q}_p\frac{dt}{t}+\mathbb{Q}_p\frac{dt}{1-t}+\Omega^1_{R^\dagger}$ ということと Proposotion 2.7 から従う. □

Proof of Theorem 2.6. $\omega=fdt\in\Omega^1_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}$ に対して, $\varphi(\omega)=\varphi(f)d(\varphi(t))$ とおくと, これは $\mathbb{Q}_p$-線形写像 $\varphi:\Omega^1_{R^\dagger}\to\Omega^1_{R^\dagger}$ を与える. 直接計算すると,

$$\varphi\left(\frac{dt}{t}\right)\in\frac{pdt}{t}+\Omega^1_{R^\dagger},\quad\varphi\left(\frac{dt}{1-t}\right)\in\frac{pdt}{1-t}+\Omega^1_{R^\dagger}$$

である. これより, Proposition 2.8 から, 重さ k の index $\mathbb{k}$ に対して, $\varphi(\mathrm{Li}_{\mathbb{k}})\in p^k\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}+M_{k-1}$ であることがわかる. また, これらの多重ポリログたちは $R^\dagger$ 上線形独立であることから, Theorem 2.6 が従う. □

3 Rational fundamental complex

1 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$ に正規交差因子 $\{0,1\}$ に付随する対数構造 $M_{\mathbb{Q}_p}$ を入れたログ・スキームを U と表すことにする (ログ・スキームについては [Ka] を参照せよ). 整数 $k\geq 1$ に対して, fine ログ・スキームの圏で自明なログ・スキーム Spec $\mathbb{Q}_p$ 上 U の k-fold fiber product を U^k と表すことにする. ログ・スキーム U^k に付随する log poles 付き de Rham 複体を $\Omega^\bullet_{U^k/\mathbb{Q}_p}$ と表す. 各整数 i に対して,

$$\Omega^{\dagger,i}_{U^k/\mathbb{Q}_p}=\Omega^i_{U^k/\mathbb{Q}_p}\otimes_{\Gamma(U^k,\mathcal{O}_{U^k})}\Gamma(U^k,\mathcal{O}_{U^k})^\dagger,$$

とおき, これを log poles 付き overconvergent de Rham 複体と呼ぶ. 定義から, 埋め込み $\Omega^\bullet_{U^k/\mathbb{Q}_p}\hookrightarrow\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p}$ がある. このとき, 任意の整数 $k\geq 1$ と各整数 i に対して,

$$H^i_{\mathrm{dR}}((\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}\setminus\{0,1\})^k/\mathbb{Q}_p)\simeq H^i(\Omega^\bullet_{U^k/\mathbb{Q}_p})\simeq H^i(\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p}).$$

が成り立つ.

次に, 複体の射 $s^k:\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p}\to\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}$ を構成する. 整数 $k\geq 1$ とし, 各 $l=0,1,\ldots,k$ に対し, 複体間の写像 $s^k_l:\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p}\to\Omega^{\dagger,\bullet}_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}$ を次のように定義する.

(i) $1\leq l\leq k-1$ の場合.
写像 s^k_l を $\tau^k_l(t_1,\ldots,t_{k-1})=(t_1,\ldots,t_l,t_l,t_{l+1},\ldots,t_{k-1})$ によって定義された写像 $\tau^k_l: U^{k-1}\to U^k$ に関する pull-back とする.

(ii) $l=0,k$ の場合.

まず写像 $\tau_l^k : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{k-1} \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^k$ を次のように定義する:

$$\tau_l^k(t_1,\ldots,t_{k-1}) = \begin{cases} (1,t_1,\ldots,t_{k-1}) & (l=0) \\ (t_1,\ldots,t_{k-1},0) & (l=k). \end{cases}$$

これから, 写像 s_l^k を τ_l^k に関する pull-back 写像として定義する. これらの写像に関して $s_0^k(\frac{dt_1}{1-t_1}\wedge\cdots)=0$, $s_k^k(\cdots\wedge\frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}})=0$ と考える.

これらの写像を用いて, 写像

$$s^k := \sum_{l=0}^{k}(-1)^l s_l^k : \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p} \to \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}$$

とおくと, この写像は複体の射となる. このとき, sequence

$$\cdots \xrightarrow{s^{k+1}} \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{s^k} \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{s^{k-1}} \cdots \xrightarrow{s^1} \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^0/\mathbb{Q}_p} \longrightarrow 0$$

は二重複体である. ここで, $\Omega^{\dagger,i}_{U^k/\mathbb{Q}_p}$ は bidegree $(-k,i)$ である. これから, この二重複体に付随する複体 $C^{\dagger,\bullet}_{\mathbb{Q}_p}$ が得られる. また $H_{\mathbb{Q}_p} := H^0(C^{\dagger,\bullet}_{\mathbb{Q}_p})$ とおく.

formal iterated integral に関するコホモロジークラスを考える. 整数 $k\geq 1$ と $\omega_1,\ldots,\omega_k \in \frac{1}{t}\Omega^1_{R^\dagger} + \frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}$ に対して, $H_{\mathbb{Q}_p}$ 上 $\omega_1(t_1)\wedge\cdots\wedge\omega_k(t_k) \in \Omega^{\dagger,k}_{U^k/\mathbb{Q}_p}$ のクラスを $[\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k]$ と表すことにする. ただし, $k=0$ のときは $[\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k]$ を $1\in\Omega^{\dagger,0}_{U^0/\mathbb{Q}_p}$ のクラスとする. また x,y に関する任意の語 $w=w_1\cdots w_k$ に対して,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおくと, クラス $[w]=[\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k]\in H_{\mathbb{Q}_p}$ が成り立つ. これより, 集合 $\{[w]=[\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k] \mid k\geq 0, w$ は x,y に関する語$\}$ は $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Q}_p$-basis になる.

Proposition 3.1. 整数 $k\geq 0$, $\omega_1,\ldots,\omega_k \in \frac{1}{t}\Omega^1_{R^\dagger} + \frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}$ とする. もし $k\geq 1$ なら, $\omega_k \in \frac{1}{1-t}\Omega^1_{R^\dagger}$ と仮定する (Proposition 2.7 より, $\int_0 \omega_1\circ\cdots\circ\omega_k \in M_k$ である). また foraml iterated integral

$$\int_0 \omega_1\circ\cdots\circ\omega_k = \sum_{|\mathbb{k}'|<k} h_{\mathbb{k}'}\mathrm{Li}_{\mathbb{k}'},$$

と書き表す. ここで, $h_{\mathbb{k}'}$ は $R^\dagger$ のある元である. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$[\omega_1\circ\cdots\circ\omega_k] = \sum_{\mathbb{k}'} \pm h_{\mathbb{k}'}(1)[w'].$$

ここで, w' は $\mathbb{k}'$ と対応する語であり, $\pm$ は単体的複体から定まる符号である.

4 Integral fundamental complex

次に $\mathbb{Z}_p$-加群 H であり同型 $H\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\simeq H_{\mathbb{Q}_p}$ となる $\mathbb{Z}_p$-加群を構成していく (この H を $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデルと呼ぶ). p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の 1 次元射影空間 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ に正規交差因子 $\{0,1,\infty\}$ に付随する対数構造 M を入れたログ・スキームを X と表すことにする. またアフィンスキーム $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ に自明な対数構造を入れたログ・スキームを W とする. 各整数 $k\geq 0$ に対して, fine ログ・スキームの圏で W 上 X の k-fold fiber product を X^k と表す.

ある $\mathbb{Z}_p$-加群の複体 $C_k^\bullet$ を構成する. ログ・スキーム X^k の modulo p reduction したログ・スキームを Y^k とおくと, 複体 $C_k^\bullet$ はログ・クリスタリンコホモロジー $H^i_{cris}(Y^k/W)$ を計算するために必要である.

まず, $P=\{\{0\},\{\infty\},\{0,\infty\}\}$ とおく. 集合 $\{1,\ldots,k\}$ から P への写像全体の集合を $I_k=\operatorname{Map}(\{1,\ldots,k\},P)$ と表すことにする. 元 $f\in I_k$ に対して, アフィン開部分ログ・スキーム $U(f)\subset X^k$ を各 $l=1,\ldots,k$ に対して $t_l\notin f(l)$ によって定義されたログ・スキームとする. ただし, t_l は X^k の l 番目の座標である. ログ・スキーム $U(f)$ 上の de Rham 複体を $\omega^\bullet(f)$ と表し, その p-進完備化を $\widehat{\omega}^\bullet(f)$ と表す.

各 $d\in I_k$ に対して, 集合 $\{\ell\in\{1,\ldots,k\}\mid f(\ell)=\{0,\infty\}\}$ を J_f と表し, 集合 J_f の位数を $|J_f|$ と表す. 各 $\ell\in J_f$ と $t\in\{0,\infty\}$ に対して, I_k の元 $f_{\ell,t}$ を次のように定義する:

$$f_{\ell,t}(\ell')=\begin{cases} f(\ell'), & \text{if } \ell'\neq\ell,\\ \{t\}, & \text{if } \ell'=\ell.\end{cases}$$

各整数 $j\geq 0$ に対し, 複体

$$C_k^{(j),\bullet}=\bigoplus_{\substack{f\in I_k\\ |J_f|=j}}\widehat{\omega}^\bullet(f)$$

とおく. 複体の間の写像 $d_k^j: C_k^{(j),\bullet}\to C_k^{(j+1),\bullet}$ を定義する. 複体 $C_k^{(j),s}$ の元 $a=(a_g)_{g\in I_k,|J_f|=j}$ と $|J_f|=j+1$ を満たす $f\in I_k$ に対して, $d_k^j(a)$ の f での座標を

$$\sum_{m=0}^{j}(-1)^m(\iota^*_{f,\ell_m,0}a_{f_{\ell_m,0}}-\iota^*_{f,\ell_m,\infty}a_{f_{\ell_m,\infty}})$$

とする. ここで, $J_f=\{\ell_0,\ldots,\ell_j\}$, $\ell_0<\cdots<\ell_{j+1}$ であり, $\ell\in J_f$ と $t\in\{0,\infty\}$ に対して, $\iota^*_{f,\ell,t}$ は open immersion $U(f)\hookrightarrow U(f_{\ell,t})$ に関する pull-back 写像 $\widehat{\omega}^\bullet(f_{\ell,t})\to\widehat{\omega}^\bullet(f)$ である.

この複体の射を用いると, sequence

$$C_k^{(0),\bullet}\xrightarrow{d_k^0}C_k^{(1),\bullet}\xrightarrow{d_k^1}C_k^{(2),\bullet}\xrightarrow{d_k^2}\cdots$$

は二重複体となる. ここで, $C_k^{(j),\ell}$ は bidegree (j,ℓ) とおく. この二重複体に付随する単体的複体を $C_k^\bullet$ と表す. 構成から, 複体 $C_k^\bullet$ は k-fold 完備テンソル積 $C_1^\bullet\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}C_1^\bullet$ に付随する単体的複体と同型である.

また同様に $\omega^\bullet(f)$ を overconvergent de Rham 複体 $\omega^{\dagger,\bullet}(f)$ に置き換えることよって, 部分複体 $C_k^{\dagger,\bullet}\subset C_k^\bullet$ を定義できる.

Proposition 4.1. 複体の射 $C_k^{\dagger,\bullet} \hookrightarrow C_k^\bullet$ は quasi-isomorphism である.

次に, 複体 $C_k^\bullet$, $C_k^{\dagger,\bullet}$ と結びつく簡単な複体 $C_k'^\bullet$ を導入する. まず $c_k \in I_k$ を $\{\infty\}$ へ送る定数写像とする. 複体 $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{0-map} \mathbb{Z}_p\frac{dt}{t} \oplus \mathbb{Z}_p\frac{dt}{1-t}$ を $C_1'^\bullet$ と表す. ここで $\mathbb{Z}_p$ は degree 0 に位置する. 対角写像 $C_1'^\bullet \hookrightarrow C_1^{(0);\bullet}$ と graded $\mathbb{Z}_p$-加群の埋め込み $C_1^{(0),\bullet} \hookrightarrow C_1^\bullet$ との合成写像 $C_1'^\bullet \hookrightarrow C_1^\bullet$ を考える. この合成写像 $C_1'^\bullet \hookrightarrow C_1^\bullet$ は複体の射であり, quasi-isomorphism である. 各 $k \geq 0$ に対して, k-fold テンソル積 $C_1'^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_p} C_1'^\bullet$ に付随する単体的複体を $C_k'^\bullet$ とする. このとき, 合成写像から quasi-isomorphism $C_k'^\bullet \hookrightarrow C_k^\bullet$ が誘導される. 以上の議論より, Proposition 4.1 によって次の系が得られる.

Corollary 4.2. 合成写像

$$C_k'^\bullet \hookrightarrow C_k^{\dagger,(j),\bullet} \hookrightarrow C_k^{\dagger,\bullet}$$

は quasi-isomorphism である.

次に複体 $C^\bullet$ を $C_k^\bullet$ から構成する. 整数 $k \geq 1$ とする. 各 $\ell = 0, \ldots, k$ に対して, 複体の射

$$s_{k,\ell} : C_k^\bullet \to C_{k-1}^\bullet$$

で $C_k^{\dagger,\bullet} \to C_{k-1}^{\dagger,\bullet}$ を誘導する射を導入する. まず写像 $s'_{k,\ell} : I_{k-1} \to I_k$ を

$$s'_{k,\ell}(f)(m) = \begin{cases} f(m), & \text{if } 1 \leq m \leq \min(\ell, k-1), \\ f(m-1), & \text{if } \max(\ell,1) < m \leq k, \\ \infty, & \text{if } (\ell, m) = (0,1), (k,k). \end{cases}$$

とする. この写像 $s'_{k,\ell}$ は単射である. 各 $f \in I_{k-1}$ に対して, 複体の射

$$s_{k,\ell,f} : \widehat{\omega}^\bullet(s'_{k,\ell}(f)) \to \widehat{\omega}^\bullet(f)$$

を次のように定義する. 各 $\ell = 0, \ldots, k$ に対して, closed immersion $\iota_{k,\ell} : (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p})^{k-1} \hookrightarrow (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p})^k$ を

$$\iota_{k,\ell}(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \begin{cases} (1, t_1, \ldots, t_{k-1}), & \text{if } \ell = 0, \\ (t_1, \ldots, t_\ell, t_\ell, \ldots, t_{k-1}), & \text{if } 1 \leq \ell \leq k-1, \\ (t_1, \ldots, t_{k-1}, 0), & \text{if } \ell = k \end{cases}$$

と定義する.

$1 \leq \ell \leq k-1$ の場合について, 射 $\iota_{k,\ell}$ はログ・スキーム間の closed immersion $\iota_{k,\ell,f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k,\ell}(f))$ を誘導する. 射 $\iota_{k,\ell,f}$ による複体の pull-back 写像を $s_{k,\ell,f}$ とする.

$\ell = 0$ (resp. $\ell = k$) の場合は, 射 $\iota_{k,\ell}$ はログ・スキームの closed immersion $\iota_{k,\ell,f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k,\ell}(f))$ を誘導しないが, $d\log(t_1) \wedge \omega$ (resp. $d\log(t_k) \wedge \omega$) の形の微分形式を 0 へ送ることによって, 複体の pull-back 写像 $s_{k,\ell,f} : \widehat{\omega}^\bullet(s'_{k,\ell}(f)) \to \widehat{\omega}^\bullet(f)$ を定義することができる. 写像 $s_{k,\ell}^{(j)} : C_k^{(j),\bullet} \to C_{k-1}^{(j),\bullet}$ を $(\omega_f)_{f \in I_k, |J_f| = j}$ を $(s_{\ell,f}(\omega_{s'_{k,\ell}(f)}))_{f \in I_{k-1}, |J_f| = j}$ へ送る写像とする.

写像 $s_{k,\ell}^{(j)}$ たちは複体の射 $s_{k,\ell}: C_k^\bullet \to C_{k-1}^\bullet$ を与えて, 射 $s_{k,\ell}$ は $C_k^{\dagger,\bullet} \to C_{k-1}^{\dagger,\bullet}$ を誘導する. 射 $s_k := \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell s_{k,\ell}$ とおくと, sequence

$$\cdots \xrightarrow{s_3} C_2^\bullet \xrightarrow{s_2} C_1^\bullet \xrightarrow{s_1} C_0^\bullet$$

は二重複体となる. ここで, C_k^m は bidegree $(-k,m)$ に位置する. この二重複体に付随する simple 複体を $C^\bullet$ と表すことにする. 同様に複体 $C^{\dagger,\bullet}$ も定義できる.

各 $k \geq 0$ に対し, 自然な射影 $C_k^{\dagger,\bullet} \to C_k^{\dagger,(0),\bullet} \to \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$ は複体の全射 $C_k^{\dagger,\bullet} \to \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$ を与える. もし $k \geq 1$ なら, 各 $\ell = 0, \ldots, k$ に対し, 写像 $s'_{k,\ell}: I_{k-1} \to I_k$ を c_{k-1} を c_k へ送る写像とする. これから, 複体の可換図式

$$\begin{array}{ccc} C_k^{\dagger,\bullet} & \xrightarrow{s_{k,\ell}} & C_{k-1}^{\dagger,\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \xrightarrow{s_{k,\ell,c_{k-1}}} & \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_{k-1}) \end{array}$$

を得る. また, $s'_k := \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell s_{k,\ell,\{f_{k-1}^\infty\}}$ とおく. このとき, 二重複体

$$\cdots \xrightarrow{s'_3} \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_2) \xrightarrow{s'_2} \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_1) \xrightarrow{s'_1} \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_0)$$

を得る. この二重複体に付随する単体的複体を $\widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$ と表し, 複体の全射 $C^\bullet \to \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$ が得られる. したがって, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} C_k'^\bullet & \longrightarrow & \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \longleftarrow & C_k^{\dagger,\bullet} & \xrightarrow{qis} & C_k^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ C_k'^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{qis} & \widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\simeq} & \Omega^{\dagger,\bullet}_{U^k/\mathbb{Q}_p}. & & \end{array}$$

また, $H := H^0(C^\bullet)$, $H^\dagger := H^0(C^{\dagger,\bullet})$ とおくと, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(C'^\bullet) & \longrightarrow & H^0(\widehat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)) & \longleftarrow & H^\dagger & \xrightarrow{\simeq} & H \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ H^0(C'^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\simeq} & H^\dagger_{\mathbb{Q}_p}. & & & & \end{array}$$

したがって, コホモロジー $H_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{Z}_p$ モデル H を構成することができた.

5 The proof of main Theorem

この章では, ログ・スキーム Z_T を構成し, compatible system of liftings of Frobenius である system $(\phi_{T,n}: Z_{T,n} \to Z_{T,n})_n$ を構成する. この system から得られる log. PD-envelope Z_T 上の複体 $\widetilde{C}_k^\bullet$ は $C_k^\bullet$ と quasi-isomorphism であり, Frobenius が作用する. この複体 $\widetilde{C}_k^\bullet$ に作用する Frobenius を用いて, 主定理の証明を行う.

任意の空でない部分集合 $T \subset \{0, \infty\}$ に対して, $U_T := X \setminus T$ とおく. $T = \{0\}, \{\infty\}$ の場合は $Z_T = U_T$ とおく. $T = \{0, \infty\}$ の場合は fiber product $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$ を blow-up し strict transforms を除くことによって得られる fine ログ・スキームを Z_T とする. ログ・スキーム Z_T は次のように明示的に構成することができる.

まず t を $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ の標準座標とし, $s = \frac{1}{t}$ とおく. このとき, $U_T = X \setminus T$ は $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[t, s]$ に $\{t = 1\}$ の対数構造を入れたログ・スキームである. ログ・スキーム $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$ の底スキームは $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[s_1, t_2]$ である. ここで, $s_1 = (1 - s) \otimes 1$, $t_2 = 1 \otimes (1 - t)$ である. これより, fine ログ・スキーム Z_T の底スキームは $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ である. $\frac{1-t}{1-s} = -\frac{1}{t}$ は U_T 上可逆であるので, 準同型 $\iota_T^\sharp : \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}_p[s, t]$ を $\iota_T^\sharp(s_1) = 1 - s$, $\iota_T^\sharp(t_2) = 1 - t$ によって定義する. これより, スキーム間の closed immersion $\iota_T : U_T \hookrightarrow Z_T$ が得られた. また, Z_T 上の対数構造については次のように考える. 因子 $\{s_1 = 0\} = \{t_2 = 0\} \subset Z_T$ は正規交差因子であり, この因子に付随する対数構造を M_Z と表すことにする. これより, ログ・スキームの射 $\iota_{T, \log} : (U_T, M_T) \hookrightarrow (Z_T, M_Z)$ は exact closed immersion である.

次に, compatible system of liftings of Frobenius の構成を行う. まず $T = \{0\}, \{\infty\}$ の場合について考える. 元 $x \in \{0, \infty\}$ に対し, $U_{\{x\}, n} := U_{\{x\}} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とおく. この底スキームは $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[u]$ である. ただし, $x = \infty$ の場合は $u = t$ とし, $x = 0$ の場合は $u = s$ とする. $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上の Frobenius 写像 $\phi_{u,n}$ を

$$\phi_{u,n}(u) = \frac{u^p}{(1-u)^p + u^p}$$

によって定義する. $(1-u)^p + u^p$ は $U_{\{x\}, n}$ 上可逆であるので, $U_{\{x\}, n}$ 上の対数構造は 2 つ存在し, その対数構造 $\alpha : \mathbb{N}^{\oplus 2} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[u]$ と $\beta : \mathbb{N}^{\oplus 3} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[u]$ は

$$\alpha(m_1, m_2) = (1-u)^{m_1} u^{m_2}, \quad \beta(m_1, m_2, m_3) = \frac{(1-u)^{m_1} u^{m_2}}{((1-u)^p + u^p)^{m_3}}$$

によって定義る. これより, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathbb{N}^{\oplus 3} \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[u] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[u]. \end{array}$$

ここで, 図式の上の写像 $\mathbb{N}^{\oplus 2} \to \mathbb{N}^{\oplus 3}$ は $(m_1, m_2) \mapsto (pm_1, pm_2, m_1 + m_2)$ とする. したがって, Frobenius 写像 $\phi_{u,n} : U_{\{x\}, n} \to U_{\{x\}, n}$ はログ・スキームの射であることがわかる..

次に, $T = \{0, \infty\}$ の場合について考える. $Z_{T,n} := Z_T \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とおくと, この底スキームは $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ である. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$ 上の Frobenius 写像 $\phi_{T,n}$ は

$$\phi_{T,n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}, \quad \phi_{T,n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$$

によって定義する. $\phi_{T,n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}$ と $\phi_{T,n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$ は $Z_{T,n}$ 上可逆であるので, Frobenius 写像 $\phi_{T,n}$ はログ・スキームの射である. 任意の $T \in P$ に対して, system $(\phi_{T,n} : Z_{T,n} \to Z_{T,n})_n$ は compatible system of liftings of Frobenius である.

各 $f \in I_k$ に対し, W 上の $Z_{f(\ell)}$ $(\ell = 1, \ldots, k)$ の fiber product を $Z(f)$ と書き表すことにする. このとき, 射 $\iota_{T,\log}$ によって exact closed immersion $\iota_f : U(f) \hookrightarrow Z(f)$ が誘導される. 射 ι_f を modulo p^n した射と W mod p^n の standard PD-structure に関する log. PD-envelope を n に関して帰納極限をとったログ・スキームを $D(f)$ と書くことにする. また $Z(f)$ 上の de Rham 複体を $D(f)$ へ pull-back した複体を $\widetilde{\omega}^\bullet(f)$ とする. 射 ι_f は quasi-isomorphism $\widetilde{\omega}^\bullet(f) \to \omega^\bullet(f)$ を誘導する. 複体 $\omega^\bullet(f)$ の代わりに $\widetilde{\omega}^\bullet(f)$ を用いることにより, 異なる複体 $\widetilde{C}_k^\bullet$ と quasi-isomorphism $\widetilde{C}_k^\bullet \to C_k^\bullet$ が得られる. さらに整数 $k \geq 1$ と各 $\ell = 0, \ldots, k$ に対して, 複体の射 $\widetilde{s}_\ell^k : \widetilde{C}_k^\bullet \to \widetilde{C}_{k-1}^\bullet$ を同様の方法で定義でき, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{C}_k^\bullet & \xrightarrow{\widetilde{s}_k^\ell} & \widetilde{C}_{k-1}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k^\bullet & \xrightarrow{s_k^\ell} & C_{k-1}^\bullet \end{array}$$

は可換である.

複体 $\widetilde{\omega}^\bullet(f)$ を張り合わせることにより, 複体 $\widetilde{C}_k^\bullet$, $\widetilde{C}^\bullet$ が定義され, 2つの quasi-isomorphisms $\widetilde{C}_k^\bullet \to C_k^\bullet$ と $\widetilde{C}^\bullet \to C^\bullet$ を得る. したがって, $\widetilde{H} := H^0(\widetilde{C})$ とおくと,

$$\widetilde{H} \simeq H \simeq H^\dagger$$

が得られる.

各 $f \in I_k$ に対して, $Z(f)$ mod p^n 上の Frobenius 持ち上げの compatible system $\phi_{f(1),n} \times \cdots \times \phi_{f(k),n}$ は $\widetilde{\omega}^\bullet(f)$ の自己準同型 ϕ_f を誘導する. これらを張り合わせることによって, $\widetilde{C}_k^\bullet$ 上の自己準同型 ϕ が得られる. さらに, 写像 $\widetilde{s}_k^\ell : \widetilde{C}_k^\bullet \to \widetilde{C}_{k-1}^\bullet$ は ϕ と可換である. これより, $\widetilde{C}^\bullet$ 上の自己準同型 ϕ が得られる.

次に, p-進多重ゼータ値とコホモロジー H の関係について述べる. まず x, y に関する語 $w = w_1 \cdots w_k$ として,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt_i}{t_i} & (\text{if } w_i = x) \\ \frac{dt_i}{1-t_i} & (\text{if } w_i = y). \end{cases}$$

とおく. このとき, $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k \in C_k'^k$ であるので, これは $C'^\bullet$ の 0-cocycle である. このことから, $H \simeq H^0(C'^\bullet)$ 上 $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k$ のコホモロジークラスを $[w]$ によって表すことにする.

Proposition 5.1. 集合 $\{[w] \mid w$ は x, y に関する語$\}$ は H の $\mathbb{Z}_p$-basis である.

Proof. 集合 $\{[w] \mid w$ は x, y に関する長さ k の語$\}$ は $H^k(C_k^\bullet) \simeq H^k(C_k'^\bullet)$ の $\mathbb{Z}_p$-basis である. また spectral sequence

$$E_1^{p,q} = H^q(C'^\bullet_{-p}) \Rightarrow H^{p+q}(C'^\bullet).$$

が存在する. よって, 次を示せば十分である:

$$E_1^{-k,k} = E_2^{-k,k} = E_3^{-k,k} = \cdots.$$

これより, 写像 $d_1 : E_1^{-k-1,k} \to E_1^{-k,k}$ がゼロ写像であることと $E_2^{-k-1,k} = \{0\}$ であることを示せば十分である. これはすぐにわかる. □

Proposition 5.2. n を非負整数とし, $\mathbb{k}=(k_1,\dots,k_n)$ を重さ k の index とする. また, $\mathbb{k}$ と対応する語を $w=x^{k_1-1}y\cdots x^{k_n-1}y$ とする.

$$\varphi(\mathrm{Li}_{\mathbb{k}})=p^k\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}+\sum_{\mathbb{k}'\text{ s.t. }|\mathbb{k}'|<k}h_{\mathbb{k}'}\mathrm{Li}_{\mathbb{k}'},$$

とおく. ここで $k=|\mathbb{k}|$ であり, ある元 $h_{\mathbb{k}'}\in R^{\dagger}_{\mathbb{Q}_p}$ である. このとき, $H\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ 上,

$$\phi([w])=p^k[w]+\sum_{\mathbb{k}'\text{ s.t. }|\mathbb{k}'|<k}h_{\mathbb{k}'}(1)[w'],$$

が成り立つ. ここで, w' は $\mathbb{k}'$ と対応する語である.

Proof. 同型 $H\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\simeq H_{\mathbb{Q}_p}$ と合成

$$H^0(\widetilde{C}^\bullet)\simeq H\simeq H^\dagger\to H^0(\hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(\infty))\to H_{\mathbb{Q}_p}$$

が Frobenius 写像と可換であることから, Proposition 3.1 より従う. □

最後に Frobenius 写像と Hodge フィルトレーションに関して考える. ここで, Theorem 1.1 の証明を行う. $f\in I_k$ とし, $\mathcal{J}_f\subset\mathcal{O}_{Z(f)}$ を exact closed immersion $\iota_f:U(f)\hookrightarrow Z(f)$ に対応するイデアル層とする. $\widetilde{\omega}^\bullet(f)$ 上のフィルトレーションを次のように定義する:

$$\begin{aligned}F^n\widetilde{\omega}^\bullet(f)=[\mathcal{J}_f^{[n]}&\to\mathcal{J}_f^{[n-1]}\widetilde{\omega}^1(f)\to\mathcal{J}_f^{[n-2]}\widetilde{\omega}^2(f)\to\\&\cdots\to\widetilde{\omega}^n(f)\to\widetilde{\omega}^{n+1}(f)\to\cdots],\end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{J}_f^{[n]}$ は $\mathcal{J}_f$ の n-th PD-ideal である. このフィルトレーションは $\widetilde{C}_k^{(j),\bullet}$j 上のフィルトレーション $F^n\widetilde{C}_k^{(j),\bullet}$ を誘導する. さらに次のフィルトレーション

$$F^n\widetilde{C}_k^\bullet=\mathrm{tot}[F^n\widetilde{C}_k^{(0),\bullet}\to F^n\widetilde{C}_k^{(1),\bullet}\to\cdots],$$

$$F^n\widetilde{C}^\bullet=\mathrm{tot}[F^n\widetilde{C}_k^\bullet\to F^n\widetilde{C}_{k-1}^\bullet\to\cdots]$$

を誘導する. これより, $F^n\widetilde{H}\subset\widetilde{H}$ である.

任意の長さ k の語 w に対して, $[w]\in F^kH$ が成り立つ. また構成から,

$$\phi(F^k\widetilde{\omega}^\bullet(f))\subset(p\mathbb{Z}_p)^{[k]}\cdot\widetilde{\omega}^\bullet(f),$$

が成り立つ. したがって,

$$\phi(F^kH)\subset(p\mathbb{Z}_p)^{[k]}H$$

が成り立つ.

一方, スペクトラル系列

$$E_1^{p,q}=H^q(C_{-p}^\bullet)\Rightarrow H^{p+q}(C^\bullet)$$

から H 上のフィルトレーション $W_{2n}H = \mathbb{Z}_p\text{-span}\{[w] \mid w$ は長さ n の語$\}$ が作られる. また Frobenius 写像 ϕ は $E_1^{-k,k}$ 上 p^k 倍で作用するので, ϕ は $\mathrm{Gr}^W_{2n}H$ 上 p^k 倍で作用する. もし $w = \emptyset$ なら, $\phi([\emptyset]) = [\emptyset]$ とする. したがって, 唯一つの $\mathbb{Z}_p$-線形写像 $z : H \to \mathbb{Q}_p$ で, $z([\emptyset]) = 1$ と $z \circ \phi = z$ が成り立つ.

Proposition 5.2 と p-進多重ゼータ値 $\zeta_p(\Bbbk)$ の定義から,

$$\zeta_p(\Bbbk) = z([w])$$

が成り立つ. したがって, 写像 z の性質とフィルトレーション F^k と Frobenius 作用から,

$$\zeta_p(\Bbbk) = z([w]) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が従う. したがって, Theorem 1.1 が証明された.

References

[AHY] Akagi, K. and Hirose, M. and Yasuda, S.: *Integrality of p-adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, preprint.

[Be] Besser, A.: *Syntomic regulators and p-adic integration II: K2 of curves*, Isr. J. Math. **120**, (2000) pp.335–360.

[BO] Berthelot, P. and Ogus, A.: *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[Cha] Chatzistamatiou, A.: *On integrality of p-adic iterated integrals*, preprint (2015) arXiv:1501.05760v2.

[CdS] Coleman, R. and de Shalit, E.: *p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*, Invent. Math. **93(2)**, (1988) pp.239–266.

[Col] Coleman, R.: *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69**, (1982) pp.171–208.

[F] Furusho, H.: *p-adic multiple zeta values I*, Invent. Math. **155**, (2004) pp.253–286.

[Ka] Kato, K.: *Logarithmic structure of Fontaine Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, (1989) pp.191–224.

[Ma1] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. **78(5)**, (1972) pp.653–667.

[Ma2] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration (estimates)*, Annals of Mathematics Second Series. **98(1)**, (1973) pp.58–95